Magische Quadrate und ihre Verallgemeinerung: ein graphentheoretisches Problem

Jörg R. MÜHLBACHER*

SYSPRO 2/77

Diese Arbeit erscheint in: Graphs, Datastructures, Algorithms
Appl. Comp. Sc. Vol. 13, 1978
M. Nagl und H.-J. Schneider (Ed.)

* Informatik-Systemprogrammierung
Universität Linz
A-4045 Linz-Auhof
ÖSTERREICH

Magische Quadrate und ihre Verallgemeinerung: ein graphentheoretisches Problem

J Ö R G M Ü H L B A C H E R *

*Universität Linz/Österreich
Informatik-Systemprogrammierung

A-4045 LINZ-Auhof

0. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Problem aufgegriffen, welches 1963 von J. Sedlacek unter Nr. 27 in den Proceedings of the "Symposium on Theory of Graphs and its Applications" in Smolenice gestellt wurde. Es wird gezeigt, daß es sich um eine Verallgemeinerung der Magischen Quadrate handelt und eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, wann ein Graph magisch ist. Diese Bedingung ist für paare Graphen sogar notwendig. Dabei spielen F-Faktoren, das sind spannende Teilgraphen, eines Graphen X eine zentrale Rolle. Diese F-Faktoren stellen eine Verallgemeinerung des Faktor-Begriffes dar und sind ein Spezialfall bzw. bei der Klasse der Paaren Graphen ident mit einem perfekten Matching auf X. Im Ausblick wird angeregt, den vermutlich tieferen Zusammenhang zwischen F-Faktoren und Matchings auf beliebige Graphen zu untersuchen.

0. Summary

In this paper a problem is treated, which has been stated by J. Sedlacek in 1963 as problem no. 27 printed in the proceedings of the "Symposium on Theory of Graphs and its applications" held in Smolenice. It is shown here that this problem is a natural generalization of Magic Squares and further, a sufficient condition whether a graph X is magic or not, is proofed. This condition is even a necessary one for bipartite graphs. In this theorem the concept of F-factors is dominant. These are certain spanning subgraphs of X and can be seen as a generalization of the concept of factors of a graph. In the case of bipartite graphs and as a special case F-factors are equivalent to perfect matchings. Finally further research on the connection between F-factors and matchings in general is suggested.

1. Einleitung

Die systematische graphentheoretische Untersuchung von Problemen, die mehr oder weniger dem Bereich der Denksportaufgaben und der Unterhaltungsmathematik zuzuordnen sind, ist ebenso alt wie die Graphentheorie selbst. Dazu sei beispielhaft an das Königsberger Brückenproblem, an diverse Mischungs- und Wägungsaufgaben oder an Rundreiseprobleme erinnert. Durch eine entsprechende Abstraktion von den ursprünglichen Problemstellungen kommt man nicht selten auf fundamentale Aussagen graphentheoretischer Natur, die dann ihrerseits selbst wieder durch entsprechende Interpretation Lösungen für ähnlich gelagerte Fragestellungen bieten.

Aus dieser Sicht heraus scheint auch die Behandlung von magischen Quadraten und ihrer unten definierten Verallgemeinerung auf magische Graphen gerechtfertigt.

1.1 Magische Quadrate

Eine umfassende Abhandlung über dieses Thema stammt von Hermann Scheffler (/SCHE 82/), veröffentlicht in einem 1882 erschienenen Buch "Die magischen Figuren, allgemeine Lösung und Erweiterung eines aus dem Alterthume stammenden Problems". Wie der Titel dieses Werkes bereits ankündigt, sind schon dort diverse Verallgemeinerungen in Angriff genommen und einer systematischen Behandlung unterzogen worden.

Die klassische und zugleich engste Definition eines magischen Quadrates lautet wie folgt: (/SCHE 82/).

Definition 1.1: Unter einem magischen Quadrat versteht man eine Anordnung der Zahlen 1, 2, ..., n^2 in Quadratform dergestalt, daß jede horizontale, vertikale und diagonale Reihe dieselbe Summe $\frac{1}{2}n(n^2+1)$ bildet.

Beispiel 1.1:

1	12	23	9	20	
8	19	5	11	22	
15	21	7	18	4	Summe: 65
17	3	14	25	6	
24	10	16	2	13	

Scheffler gibt nun zunächst für gerades bzw. ungerades n Konstruktionsvorschriften an. So entsteht etwa obiges magisches Quadrat mit $n = 5$ aus folgendem allgemeinen Algorithmus.

(1) Wähle vier ganze Zahlen a, b, a', b', relativ prim zu n, sodaß auch $ab' - a'b$, $a + a'$, $b + b'$, $a - a'$, $b - b'$ relativ prim zu n (und $\neq 0$) sind.

(2) Konstruiere durch fortgesetzte Addition der Zahl $a + bn$ in horizontaler Richtung und durch fortgesetzte Addition von $a' + b'n$ in vertikaler Richtung nachstehende quadratische Anordnung von Zahlen:

$$
\begin{array}{llll}
1 + 0 + 0n & 1 + a + bn & 1 + 2a + 2bn & \ldots\ldots \\
1 + a' + b'n & 1 + (a+a') + (b+b')n & 1 + (2a+a') + (2b+b')n & \ldots\ldots \\
1 + 2a' + 2b'n & 1 + (a+2a') + (b+2b')n & 1 + (2a+2a') + (2b+2b')n & \ldots\ldots \\
1 + 3a' + 3b'n & 1 + (a+3a') + (b+3b')n & 1 + (2a+3a') + (2b+3b')n & \ldots\ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\vdots\ \ldots\ldots & \vdots\ \ldots\ldots & \vdots\ \ldots\ldots &
\end{array}
$$

(3) Jede Zahl aus diesem quadratischen Schema hat allgemein die Gestalt
$1 + c + dn$.
Ersetze nun c, d durch die kleinsten positiven Reste r bzw. s modulo n.
(Ist $c \quad 0$, so sei $c \bmod n = (c+n) \bmod n$)
Das Ergebnis ist ein magisches Quadrat untenstehender Gestalt, wobei für
$1 + r_{ij} + s_{ij}n \quad n^2$ wieder der kleinste positive Rest zu nehmen ist.

$$
\begin{array}{lll}
1 + r_{00} + s_{00}n & 1 + r_{01} + s_{01}n & 1 + r_{02} + s_{02}n\ldots \\
1 + r_{10} + s_{10}n & 1 + r_{11} + s_{11}n & 1 + r_{12} + s_{12}n\ldots \\
1 + r_{20} + s_{20}n & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Naheliegende Erweiterungen für magische Quadrate sind der Verzicht, daß auch die Diagonalen dieselbe Summe wie die Zeilen bzw. die Spalten haben müssen und schließlich, daß die Zahlen nicht mehr aus der Menge $1, 2, \ldots\ldots, n^2$ zu sein brauchen, sondern beliebige, jedoch verschiedene, natürliche Zahlen sein können.

In diesem Sinne definieren wir folgt:

Definition 1.2: Unter einem allgemeinen magischen Quadrat versteht man eine Anordnung von n^2 verschiedenen natürlichen Zahlen in einem quadratischen Schema derart, daß die Zeilen- und Spaltensummen denselben Wert ergeben. Dieser Wert heiße magische Summe.

Beispiel:

14	9	2
3	5	17
8	11	6

1.2 Magische Graphen

Es sei ein (allgemeines) magisches Quadrat mit der magischen Summe s gegeben:

$$\begin{matrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{matrix} \qquad s = \sum_i m_{ij} = \sum_j m_{ij}$$

für $1 \leq i \leq n$ bzw. $1 \leq j \leq n$

und $m_{ij} \neq m_{uv}$ für $i,j \neq u,v$

Dann können die m_{ij} den Kanten eines vollständigen bipartiten Graphen zugeordnet werden. Dazu folgende Definition

Definition 1.3: Ein vollständiger bipartiter Graph X = (V,E) ist ein paarer Graph $X = ((V_1,V_2),E)$ mit $V = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, sodaß von jedem $x \in V_1$ genau eine Kante zu jedem $y \in V_2$ führt.

Uns interessiert hier der spezielle Fall $|V_1| = |V_2| = n$. Dann hat die zugehörige Adjazenzmatrix (/DOMU 73/) folgende Gestalt.

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|}
 & x_1^1 x_1^2 & \cdots & x_1^n & x_2^1 x_2^2 & \cdots & x_2^n \\
\hline
x_1^1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_1^n & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\
\hline
x_2^1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_2^n & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
\end{array}$$

und somit ist klar, wie - über die Darstellung von $X = ((V_1, V_2),E)$ durch die bewertete Adjazenzmatrix - jedem magischen Quadrat ein mit den m_{ij} kantenbewerteter, vollständiger bipartiter Graph zugeordnet werden kann:

Dies führt zu folgender naheliegender Verallgemeinerung:

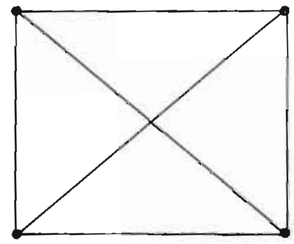
Definition 1.4: Ein endlicher ungerichteter Graph $X = (V,E)$ ohne Schlingen und Mehrfachkanten heißt magischer Graph, wenn es eine Bewertung seiner Kanten mit natürlichen Zahlen gibt, sodaß gilt:

(a) je zwei verschiedene Kanten sind verschieden bewertet.

(b) die Summe der Zahlen, die den in einem Knoten x inzidierenden Kanten zugeordnet sind, ist für alle $x \in V(X)$ gleich.

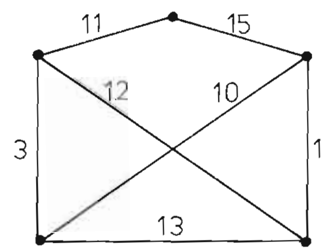
Beispiele

x_1



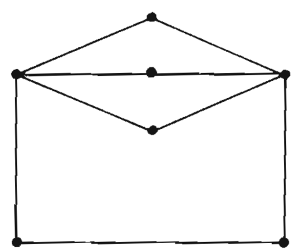
x_1 ist nicht magisch

x_2



x_2 ist magisch

x_3

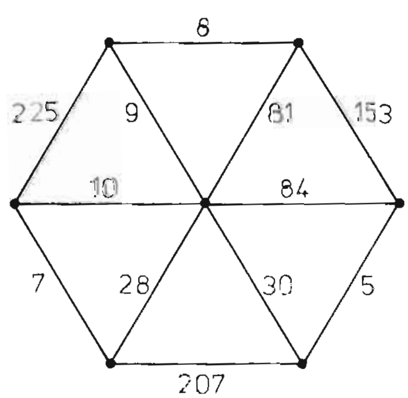


x_3 ist nicht magisch

x_4

x_4 ist magisch

x_5



x_5 ist magisch

2. Allgemeine Eigenschaften von magischen Graphen

In diesem Abschnitt wollen wir einige allgemeine Aussagen über magische Graphen und deren Kantenbewertungen treffen. In Hinblick auf das in Abschnitt 3 zu beweisende Theorem werden auch Zusammenhänge bezüglich Permutationsmatrizen und Linearfaktoren etc. vorweggenommen.

2.1 Einschränkungen und Eigenschaften für magische Graphen

Trivialerweise ist der aus genau zwei Knoten und einer Kante bestehende Graph $G(1) = (\{x,y\}, \{[x,y]\})$ magisch. Er ist auch bei allgemeinen Aussagen oft der einzige extra zu erwähnende Sonderfall, sodaß wir uns zur Vereinfachung der Sprechweise in Hinkunft auf die Menge der von G(1) verschiedenen Graphen beschränken können.

Lemma 2.1: Ist X magisch und hat X eine ungerade Anzahl von Knoten, so ist die magische Summe t gerade.

Beweis:

$$V(X) * t = \sum_{x \in V(X)} t = \sum_{x \in V(X)} \sum_{\substack{y \in V(X) \\ \& \\ [x,y] \in E(X)}} g(e)$$

$$= 2 \sum_{e \in E(x)} g(e) = 2k.$$

Also $2/(|V(X)| * t)$ und da $|V(X)|$ nach Voraussetzung ungerade ist, muß t gerade sein.

Lemma 2.2: Ist X magisch, $X \neq G(1)$, so enthält er nur innere Knoten x, d.h. $d(x) \geq 2$.

Folgerung: Bäume sind mit Ausnahme von G(1) nicht magisch.

Der Beweis für Lemma 2.2 ist trivial.

In der später bewiesenen hinreichenden Bedingung, ob Graphen magisch sind, geht der Zusammenhang eines Graphen nicht ein. Dessen ungeachtet wollen wir uns auf Graphen beschränken, die aus genau einer Komponente bestehen. Dies ist tatsächlich eine Einschränkung, da es Graphen gibt, die nicht magisch sind, deren Komponenten jedoch für sich alleine betrachtet magisch sind.

Man kann nun versuchen, Verknüpfungen zwischen magischen Graphen zu definieren. Im nachfolgenden Lemma ist ein Beispiel dazu angeführt. Eine allgemeine Untersuchung, ob und welche algebraische Strukturen über der Menge der magischen Graphen einführbar sind, ist allerdings noch nicht durchgeführt worden.

Lemma 2.3: Sind X und Y magisch mit derselben Summe t, X,Y beide $\neq G(1)$, so, daß X und Y Komponenten eines magischen Graphen sind, so kann durch nachstehende lokale Transformation ein zusammenhängender magischer Graph Z erzeugt werden.

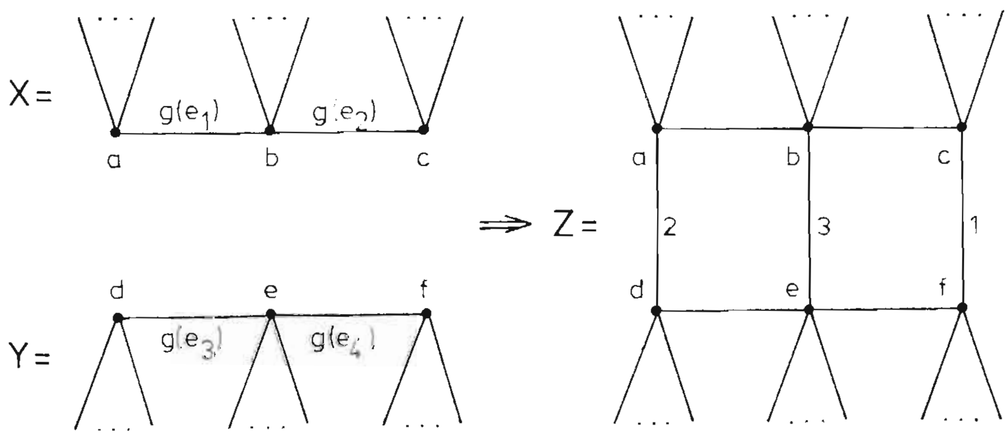


FIG. 2.1

Beweis: In der Transformation wird o.B.d.A. vorausgesetzt, daß die Kantenbewertungen $g(e_i) \neq 1,2,3,4,5$ sind. Dies ist trivial zu erreichen. Ebenso kann angenommen werden, daß $|g(e_i)-g(e_j)| \geq 3$ sodaß auch $g(e_j)-2$, $g(e_k)-1$, $g(e_i)$, $j=1,3$; $k=2,4$; $i=5,6,\ldots\ldots,n$ von einander verschieden und ungleich 1,2,3 sind.

Definition 2.1: Sind $X=(V,E)$ ein ungerichteter Graph und $F=(V_F,E_F)$ ein spannender Teilgraph von X, d.h.: $V=V_F$ und $E_F \subseteq E$, ohne isolierte Knoten, so heißt F ein F-Faktor von X, wenn seine Komponenten aus einzelnen nicht adjazenten Kanten und/oder aus Kreisen mit ungerader Kantenanzahl bestehen.

Beispiel:

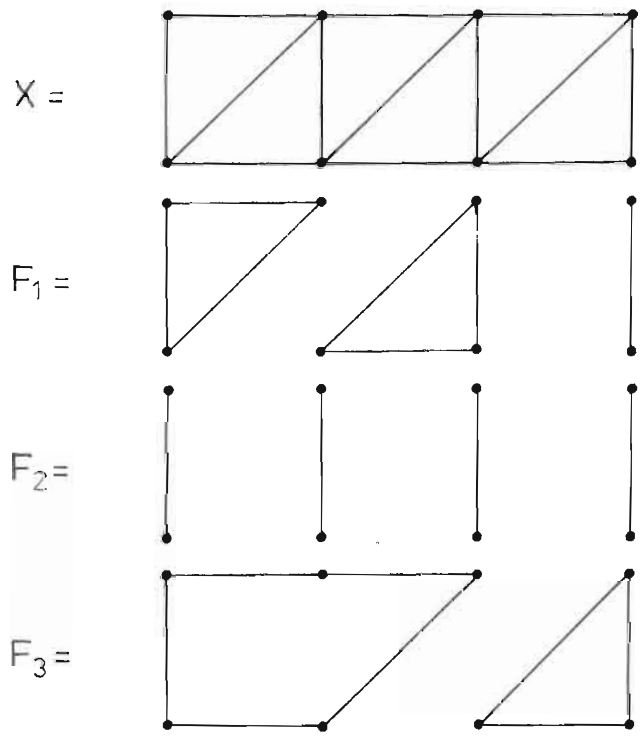


Fig. 2.2

In Fig. 2.2 sind F-Faktoren eines Graphen X gezeichnet. Ein F-Faktor zerfällt in eine "Linearkomponente" L, die ein Matching auf X ist und durch die einzelnen Kanten zusammen mit ihren inzidenten Knoten gebildet wird, und in eine Kreiskomponente $\{K_{2i+1}\}$, i=1,2,... , die aus ungeraden, paarweise disjunkten Kreisen K_{2i+1} mit 2i+1 Kanten besteht.

Sonderfälle sind $L=\emptyset$ oder $\{K_{2i+1}\}=\emptyset$.

Ein F-Faktor kann somit, soferne L und die K_{2i+1} nicht leer sind, folgendermaßen graphisch veranschaulicht werden.

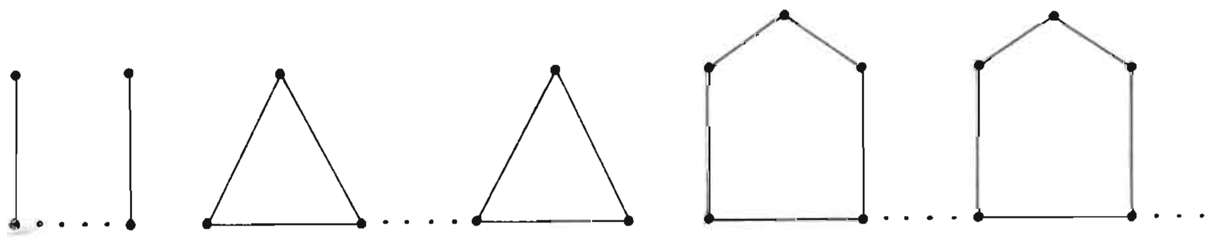


FIG. 2.3

Es gibt Graphen, die keinen F-Faktor enthalten. Wichtige Spezialfälle von F-Faktoren sind perfekte Matchings und Hamilton'sche Linien.

Definition 2.2: Eine Matrix P heißt Permutationsmatrix, wenn sie in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Eins besitzt, sonst aber nur aus Nullen aufgebaut ist.

Definition 2.3: Seien P und Q zwei quadratische (n,n) Matrizen. Dann bedeute $P < Q$, daß P durch Nullsetzen von Elementen $q_{ij} \neq 0$ aus Q entstanden ist.

Hilfssatz 2.1: Sei A die (n,n) Adjazenzmatrix eines Graphen X mit $|V(X)| = n$ Knoten und sei P eine (n,n) Permutationsmatrix mit $P < A$. Dann enthält A einen F-Faktor, der durch P konstruierbar ist.

Beweis: Es genügt wegen $P < A$ zu zeigen, daß man durch P einen Graphen mit n Knoten erklären kann, der aus einer Linearkomponente und/oder einer Kreiskomponente besteht. Daß dann P ein spannender Teilgraph von A ist, folgt unmittelbar aus $P < A$.

Ist P symmetrisch, so ist P auffaßbar als Adjazenzmatrix eines Graphen. Auf Grund der Definition einer Permutationsmatrix folgt ferner, daß der Grad jedes Knoten dieses Graphen eins ist und weil P symmetrisch sein soll, muß außerdem n gerade sein. Somit erklärt P auf dem Graphen X ein perfektes Matching mit n/2 Kanten, welches ein Spezialfall eines F-Faktors ist.

Ist P streng asymmetrisch, d.h. ist für jedes $p_{ij} \neq o$ das spiegelbildlich dazuliegende $p_{ji} = o$, so kann man P zu einer (n,n) Matrix $\bar{P}$ ergänzen, $P < \bar{P}$, indem für jedes $p_{ij} \neq 0$ das zugehörige p_{ji} ebenfalls $\neq 0$ (nämlich = 1) gesetzt wird. $\bar{P}$ enthält dann 2n von Null verschiedene Elemente und es gilt $P < \bar{P} < A$. In jeder Zeile und in jeder Spalte von $\bar{P}$ sind genau zwei Elemente $\bar{p} \neq 0$. Faßt man jetzt $\bar{P}$ als Adjazenzmatrix eines Graphen Y auf, so ist Y ein spannender Teilgraph von X, wobei jeder seiner Knoten y den Grad d(y)=2 hat. Somit zerfällt Y in eine Menge von Kreisen $\{K_{2r}\}$ und/oder $\{K_{2r+1}\}$. Aus den Kreisen K_{2r} kann in trivialer Weise eine Linearkomponente für den zu bestimmenden F-Faktor ausgewählt werden; die K_{2r+1} - soferne nichtleer - bilden die Kreiskomponente dazu.

Ist P weder symmetrisch noch streng asymmetrisch, so geht man über zu einer Matrix $\tilde{P}$ mit $\tilde{p}_{ij} = p_{ij} \vee p_{ji}$. Damit definiert $\tilde{P}$ mit $P < \tilde{P} < A$ einen spannenden Teilgraphen Y von X, dessen Knoten y entweder den Grad d(y)=1 oder den Grad d(y)=2 haben. Da die Anzahl der Knoten mit d(y)=1 wegen $\tilde{P} < A$ gerade sein muß, ist unter Wiederholung der Konstruktionsmechanismen von oben klar, wie aus Y ein F-Faktor bestimmt werden kann.

Hilfssatz 2.2: Sei P eine (n,n) Permutationsmatrix mit $P < A$ und denselben Voraussetzungen wie bei Hilfssatz 2.1. Weiter sei $p_{ij} \neq 0$. Dann kann man aus P einen F-Faktor so konstruieren, daß die Kante $[x_i, x_j] \underset{\text{def}}{=} [i,j] \in E(F)$.

Beweis: Ist P symmetrisch, so ist der F-Faktor eindeutig bestimmt und es ist $[i,j]$ wegen $p_{ij}=1$ trivialerweise aus E(F). Es genügt somit, die Argumentation für den Fall zu führen, daß P streng asymmetrisch ist. Durch den Übergang zur symmetrischen Matrix $\bar{P}$ mit $P < \bar{P} < A$ werden in dem zu $\bar{P}$ gehörigen Graphen Y Kanten $[k,i]$ und $[j,l]$ eingeführt und $[k,i],[i,j],[j,l]$ liegen auf einem Kreis K_{2r} oder K_{2r+1}. Liegt $[i,j]$ auf dem ungeraden Kreis K_{2r+1}, so gehört dieser zur Kreiskomponente von F und die Behauptung ist richtig. Im anderen Fall wird jede zweite Kante aus K_{2r} für die Linearkomponente von F ausgewählt. Beginnt man mit der Auswahl bei $[i,j]$, so ist bereits die Aussage des Satzes erfüllt.

Definition 2.4: Eine quadratische (n,n) Matrix A heißt doppelstochastisch wenn gilt:

(i) $a_{ij} \geqq 0$

(ii) $\sum_i a_{ij} = \sum_j a_{ij} = 1$

Hilfssatz 2.3: Ist der Graph X magisch mit der magischen Summe s, so erklärt seine zugehörige bewertete Adjazenzmatrix M durch $A = s^{-1}M$ eine (symmetrische) doppelstochastische Matrix A.

Beweis: Da X magisch sein soll, gilt für die Zeilensummen bzw. die Spaltensummen der bewerteten Adjazenzmatrix M die Beziehung $\sum_i m_{ij} = \sum_j m_{ij} = s$. Somit gilt wegen $A = s^{-1}M$ und $a_{ij} = s^{-1}m_{ij}$: $\sum_i a_{ij} = \sum_j a_{ij} = 1$.

Wir bezeichnen die bewerteten Adjazenzmatrizen von magischen Graphen der Kürze wegen als magische Matrizen. Entprechend dem Hilfssatz 2.3 kann man einer solchen Matrix M immer eine doppelstochastische Matrix A zuordnen, die mit $a_{ij} = 0$ oder $a_{ij} \neq 0$ ebenso den zu M gehörigen Graphen X definiert.

3. Charakterisierung magischer Graphen

In diesem Abschnitt wollen wir eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für die Eigenschaft "magisch" ableiten. Der Beweis dazu wird unter Verwendung der Hilfssätze 2.1 - 2.4 und mittels allgemeiner Sätze über doppelstochastische Matrizen (/BE 66/) geführt. (Satz von Birkhoff).

Hilfssatz 3.1: Ist A eine doppelstochastische (n,n) Matrix, so ist mindestens eines der Entwicklungsglieder $a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n}$ ihrer Determinante von Null verschieden.

Der Beweis dazu findet sich bei KÖNIG (/KO 35/) oder bei BERGE (/BE 66/).

Satz 3.1: Ist A eine doppelstochastische (n,n) Matrix, so gibt es Permutationsmatrizen $P_1, P_2, \ldots. P_k$ und positive Zahlen $t_1, t_2, \ldots., t_k \geqq 0$ sodaß gilt:

$$\text{(i)} \quad \sum_{i=1}^{k} t_i = 1$$

$$\text{(ii)} \quad A = \sum_{i=1}^{k} t_i P_i$$

Beweis: (siehe /BE 66/ Kap. 10, Theorem 11): Laut Hilfssatz 3.1 gibt es einen Ausdruck $a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n} \neq 0$. Sei $t_1 = \min (a_1^{i_1}, \ldots., a_n^{i_n})$. Dann gilt $A = t_1 P_1 + A_1$, wobei die Permutationsmatrix P_1 durch $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ definiert wird. A_1 ist wieder doppelstochastisch, enthält aber mehr Nullen als A. Das Verfahren wird im Sinne von $A = t_1 P_1 + (t_2 P_2 + A_2)$ fortgesetzt, bis mit $A = t_1 P_1 + t_2 P_2 + \ldots + t_k P_k + A_k$ mit $A_k = 0$ abgebrochen werden kann.

Satz 3.2: Ist M eine magische (n,n) Matrix, mit der magischen Summe s, so gibt es eine Zerlegung durch Permutationsmatrizen P_i, sodaß

$$M = \sum_{i=1}^{k} t_i^* P_i .$$

Beweis: Aus Hilfssatz 2.3 und Satz 3.1 folgt unmittelbar:

$$M = sA = s\left(\sum_{i=1}^{k} t_i P_i\right) = \sum_{i=1}^{k} t_i^* P_i$$

Dabei ist $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$ und $\sum_{i=1}^{k} t_i^* = s$.

Satz 3.3: Ist M eine magische Matrix und zugleich Adjazenzmatrix eines paaren Graphen X, so gibt es stets eine Zerlegung von M entsprechend Satz 3.2, wobei die Permutationsmatrizen P_i symmetrisch sind.

Beweis: Zum Beweis ist es nützlich, sich in Erinnerung zu rufen, daß ein paarer Graph X keine ungeraden Kreise enthält und somit die durch die P_i erklärten F-Faktoren perfekte Matchings (Linearfaktoren) sind.
Der Beweis wird indirekt geführt.

Es sei $M = \sum t_i^* P_i$ eine Zerlegung nach Satz 3.2, wobei die Summanden so geordnet sind, daß die ersten r-1 Permutationsmatrizen alle symmetrisch sind:

$$M = \sum_{i=1}^{r-1} t_i^* P_i + t_r^* P_r + M_r .$$

P_r sei demnach asymmetrisch und man kann auch in der weiteren Zerlegung von ($t_r^* P_r + M_r$) keine symmetrischen P abspalten. Sei mit P_r^T die Transponierte von P_r bezeichnet.
Durch Umformen erhalten wir:

$$M = \sum_{i=1}^{r-1} t_i^* P_i + \tfrac{1}{2} t_r^* (P_r + P_r^T) + M_r + \tfrac{1}{2} t_r^* (P_r - P_r^T)$$

$$= \sum_{i=1}^{r-1} t_i^* P_i + \tfrac{1}{2} t_r^* (P_r + P_r^T) + M_r^* .$$

Es sind M, $\sum t_i^* P_i$ und $\frac{1}{2} t_r^* (P_r + P_r^T)$ doppelstochastisch und symmetrisch. Der Ausdruck $\frac{1}{2} t_r^* (P_r + P_r^T)$ läßt sich zerlegen in $\frac{1}{2} t_r^* (P_r^1 + P_r^2)$, wobei P_r^1 und P_r^2 symmetrische Permutationsmatrizen sind. Also haben wir noch zwei weitere symmetrische P in der Zerlegung gefunden. Widerspruch!

Satz 3.4 Sei M eine magische Matrix und zugleich Adjazenzmatrix eines paaren Graphen. Ferner seien m_{ij} und m_{kl} zwei beliebige verschiedene Elemente $\neq 0$ daraus. Dann gibt es stets eine Zerlegung durch symmetrische Permutationsmatrizen P_r, bei der für eines der P_r gilt : $p_{ij}^r = 1$ genau dann, wenn $p_{kl}^r = 0$.

Beweis: Wir beginnen mit einer Zerlegung gemäß Satz 3.2 bzw. Satz 3.3, brechen jedoch nach dem ersten Schritt ab, wobei P_1 symmetrisch ist:

$$M = t_1^* P_1 + M_1$$

O.B.d.A. kann angenommen werden, daß m_{ij} in P_1 durch ein p_{ij}^1 repräsentiert wird. Ist dann m_{kl} nicht in P_1 durch p_{kl}^1 dargestellt, so sind wir fertig.

Im anderen Fall ist M_1 wieder doppelstochastisch und symmetrisch. Wegen $m_{ij}^1 = m_{ij} - t_1^*$, $m_{kl}^1 = m_{kl} - t_1^*$ und $m_{ij} \neq m_{kl}$ sind auch m_{ij}^1 und m_{kl}^1 verschieden.

Außerdem hat M_1 mehr Nullen als M. Also kann man M_1 analog zerlegen. Da auch nach der r-ten Zerlegung die m_{ij}^r und m_{kl}^r verschieden sind, soferne sie bis dahin gemeinsam aufgetreten sind, gibt es einmal ein P_s, durch das mit $t_s^* = m_{ij}^s$ das m_{ij}^s verschwindet, nicht aber m_{kl}^s (oder umgekehrt).

Satz 3.5: Ist X ein paarer magischer Graph, so gibt es zu je zwei Kanten e_1, e_2 einen F-Faktor, der eine der beiden Kanten enthält, die andere jedoch nicht.

Beweis: Der Satz ergibt sich sofort, wenn man die Aussage von Satz 3.4 bezüglich der Permutationsmatrizen P_r gemäß Hilfssatz 2.2 graphentheoretisch interpretiert.

Satz 3.6: Ist X ein magischer Graph, so liegt jede Kante e mindestens auf einem F-Faktor.

Beweis: Sei M die zu X gehörige magische Matrix und sei m_{ij} der Repräsentant von $e = [x_i, x_j]$. Dann folgt aus der Zerlegung von Satz 3.2, daß e durch ein p^r_{ij} in einer Permutationsmatrix P_r repräsentiert wird. Dann kann man laut Hilfssatz 2.2 einen F-Faktor konstruieren, der $e = [x_i, x_j]$ enthält.

Satz 3.7: Ist X ein Graph, bei dem jede Kante e auf einem F-Faktor liegt und gibt es zu je zwei Kanten e_1, e_2 einen F-Faktor, der eine der beiden Kanten enthält, die andere jedoch nicht, so ist X magisch.

Beweis: Zuerst erzeuge man eine Bewertung der Kanten von X, sodaß die Summe der Bewertungen der in einem Knoten inzidierenden Kanten für alle Knoten gleich ist:

$$\sum_i m_{ij} = \sum_j m_{ij} = s_1$$

wobei die m_{ij} noch nicht notwendigerweise verschieden sind.

Dies erreicht man wie folgt:

S1: anfangs werden alle Kanten e mit 0 bewertet.

S2: für jedes $e \in E(X)$ konstruiere laut Satz 3.5 einen F-Faktor und erhöhe die Bewertung m_{ij} der Kanten $e = [x_i, x_j]$ von E(F)

um 1, falls e aus der Kreiskomponente von F ist und
um 2, falls e aus dem Linearteil von F ist.

Im allgemeinen Schritt müssen nun die Bewertungen m_{ij} und m_{kl} verschiedener Kanten $e_1 = [x_i, x_j]$ und $e_2 = [x_k, x_l]$, falls noch $m_{ij} = m_{kl}$ ist, verschieden gemacht werden. Dies erreicht man durch analoge Anwendung von S2 von vorhin entlang des F-Faktors laut Voraussetzung, der o.B.d.A. e_1 enthält, aber nicht e_2. Vorher müssen die schon vorliegenden Kantenbewertungen mit einem Faktor $k \geqq 2$ multipliziert werden, damit die Differenzen $m_{rs} - m_{qp}$ verschiedener Kantenbwertungen genügend groß werden.

Theorem 3.1: Ein paarer Graph X ist genau dann magisch, wenn jede seiner Kanten auf einem F-Faktor liegt und zu je zwei Kanten e_1, e_2 ein F-Faktor existiert,der genau eine der beiden Kanten enthält.

Der Beweis von Theorem 3.1 ergibt sich durch Zusammenfassen der Sätze 3.5, 3.6 und 3.7.

Theorem 3.2: Ist X ein paarer Graph, so ist er genau dann magisch, wenn jede seiner Kanten in einem perfekten Matching liegt und es zu je zwei Kanten e_1, e_2 ein perfektes Matching gibt, das genau eine der beiden Kanten enthält.

Beweis: Da X ein paarer Graph ist, enthält X keine ungeraden Kreise. Daher besteht jeder F-Faktor nur aus einer Linearkomponente und ist daher definitionsgemäß ein perfektes Matching.

Theorem 3.3: Die vollständigen Graphen mit $|V(X)| \geqq 5$ Knoten sind magisch.

Der Beweis zu Theorem 3.3 ist insoferne leicht zu führen, indem man die Fälle $|V(X)|$ gerade und $|V(X)|$ ungerade unterscheidet. Im ersten Fall zerfallen die Graphen in Linearfaktoren, d.h. in perfekte Matchings (/KO 35/) und die hinreichende Bedingung von Satz 3.7 ist leicht erfüllbar. Im anderen Fall geht man zunächst für den vollständigen Teilgraphen mit $|V(X)|-1$ Knoten genauso vor und konstruiert dann als Kreiskomponente ein Dreieck mit dem $|V(X)|$.ten Knoten usw.

4. Ausblick

Das ursprünglich rein zahlentheoretische Problem ist durch die Sätze von vorhin zu einem Strukturproblem geworden. Die zentrale Rolle spielt der F-Faktor laut Definition 2.1, der als Verallgemeinerung des Faktorbegriffes (/KO 35/) anzusehen ist.

Wie eingangs bemerkt wurde, gibt es Graphen, die keinen F-Faktor besitzen und bei paaren Graphen, die einen F-Faktor haben, ist dieser ein perfektes Matching (Linear-Faktor). Insoferne erhebt sich die Frage, welcher allgemeiner Zusammenhang zwischen F-Faktoren und Matchings vorliegt, insbesondere, ob sich aus einem gegebenen F-Faktor eines Graphen X ein maximales Matching in Polynomialzeit bestimmen läßt. Ähnlich wie bei Matchingproblemen ist die gestellte Aufgabe für paare Graphen einfach gelöst. Außerdem läßt sich das Theorem 3.2 leicht algorithmisieren, sodaß für magische paare Graphen auch leicht eine magische Bewertung gefunden werden kann.

Daß für nichtpaare Graphen die Bedingung nicht notwendig ist, zeigt das nachstehende Gegenbeispiel von Fig. 4.1, in der für den zusammenhängenden Graphen X eine magische Bewertung angegeben ist, ohne daß für die beiden stark ausgezogenen Kanten ein F-Faktor existiert, der genau eine der beiden enthält.

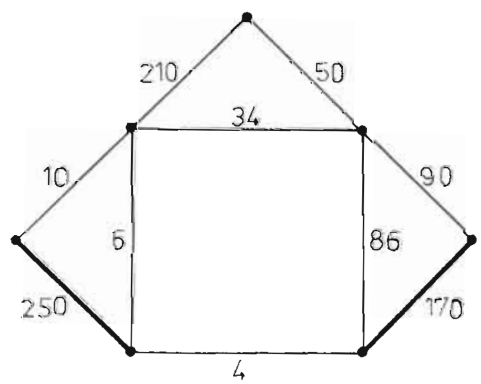


FIG. 4.1

5. Danksagung

Der Autor ist Herrn Franz-X. Steinparz für viele Anregungen zu dieser Arbeit verpflichtet. Insbesondere geht eine wesentliche Vereinfachung des Beweises von Satz 3.3 und das Beispiel von Fig 4.1 auf ihn zurück.

6. Literatur

/BE 66/ Berge, C.: The Theory of Graphs and its Applications, John Wiley & Sons, 1964, 1966.

/DO 72/ Dörfler, W., Mühlbacher, J.: Graphentheorie für Informatiker, de Gruyter 1973.

/KO 35/ König, D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Chelsea Publ. Comp. (Reprint).

/SCHE 82/ Scheffler, H.: Die magischen Figuren, allgemeine Lösung und Erweiterung eines aus dem Alterthume stammenden Problems, B.G. Teubner, Leipzig 1882.

/SE 63/ Sedlacek, J.: Problem Nr. 27 in Proc. Symposium Smolenice, Prague, 1963.